NA1 A - Test 1, 23.11.2016.

1. Neka je A regularna kvadratna matrica i U unitarna matrica. Dokazati:
(a) cond(U)=1.
(b) cond(UA)=cond(A).

2. Ako postoji bar jedna sopstvena vrednost matrice B koja je po modulu veća ili jednaka od 1, onda iterativni proces $x_{n+1} = Bx_n + c$ neće konvergirati ka rešenju za svako x_0. Dokazati.

3. Posmatrajmo problem minimizacije funkcije $f : R^n \to R$

$$\min_{X \in R^n} f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - b^T X,$$

gde je A pozitivno definitna matrica i b dati vektor. Neka je X^* minimum ove funkcije, λ sopstvena vrednost matrice A i v odgovarajući sopstveni vektor. Neka je početna tačka metode najbržeg spusta $X^{(0)} = X^* + v$.
(a) Pokazati da je gradijent u tački $X^{(0)}$ jednak $\nabla F(X^{(0)}) = \lambda v$.
(b) Pokazati da pri primeni metode najbržeg spusta korak α_0 koji minimizuje funkciju u pravcu vektora $-\nabla F(X^{(0)})$ ima vrednost $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda}$.

NA1 A - Test 1, 23.11.2016.

1. Neka je A regularna kvadratna matrica i U unitarna matrica. Dokazati:
(a) cond(U)=1.
(b) cond(UA)=cond(A).

2. Ako postoji bar jedna sopstvena vrednost matrice B koja je po modulu veća ili jednaka od 1, onda iterativni proces $x_{n+1} = Bx_n + c$ neće konvergirati ka rešenju za svako x_0. Dokazati.

3. Posmatrajmo problem minimizacije funkcije $f : R^n \to R$

$$\min_{X \in R^n} f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - b^T X,$$

gde je A pozitivno definitna matrica i b dati vektor. Neka je X^* minimum ove funkcije, λ sopstvena vrednost matrice A i v odgovarajući sopstveni vektor. Neka je početna tačka metode najbržeg spusta $X^{(0)} = X^* + v$.
(a) Pokazati da je gradijent u tački $X^{(0)}$ jednak $\nabla F(X^{(0)}) = \lambda v$.
(b) Pokazati da pri primeni metode najbržeg spusta korak α_0 koji minimizuje funkciju u pravcu vektora $-\nabla F(X^{(0)})$ ima vrednost $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda}$.